Análisis de la unidad cognitiva entre los procesos de argumentación y demostración en trigonometría

JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL

jfiallo@uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander

EDUMAT UIS

Bucaramanga, agosto de 2014

El objetivo de esta conferencia es aportar información para la mejor comprensión del proceso de aprendizaje de la demostración en el contexto del estudio de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica.

P1: ¿Existe continuidad o distancia cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar en el desarrollo de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas?

P2: ¿Se puede adaptar la noción de unidad cognitiva para analizar los procesos de desarrollo de demostraciones inductivas o empíricas?

P3: ¿Se puede adaptar el modelo de Pedemonte para el análisis de la continuidad estructural y del sistema de referencia teniendo en cuenta los tipos de demostraciones planteados por Marrades y Gutiérrez?

P4: ¿Cuáles son las dificultades que se presentan en el estudiante cuando se aproxima al proceso de demostración de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas en un SGD?

Unidad de enseñanza

- **Actividad 1. Razones trigonométricas para triángulos rectángulos**
- **Actividad 2. Razones trigonométricas para ángulos en posición normal**
- **Actividad 3. Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas**
- **Actividad 4. Identidades Pitagóricas**
- **Actividad 5. Seno y coseno de la suma de dos ángulos**
- **Actividad 6. Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos**

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

DEMOSTRACIÓN

es

una justificación racional

tiene como objetivo

validar

se dirige a

Comunidad matemática

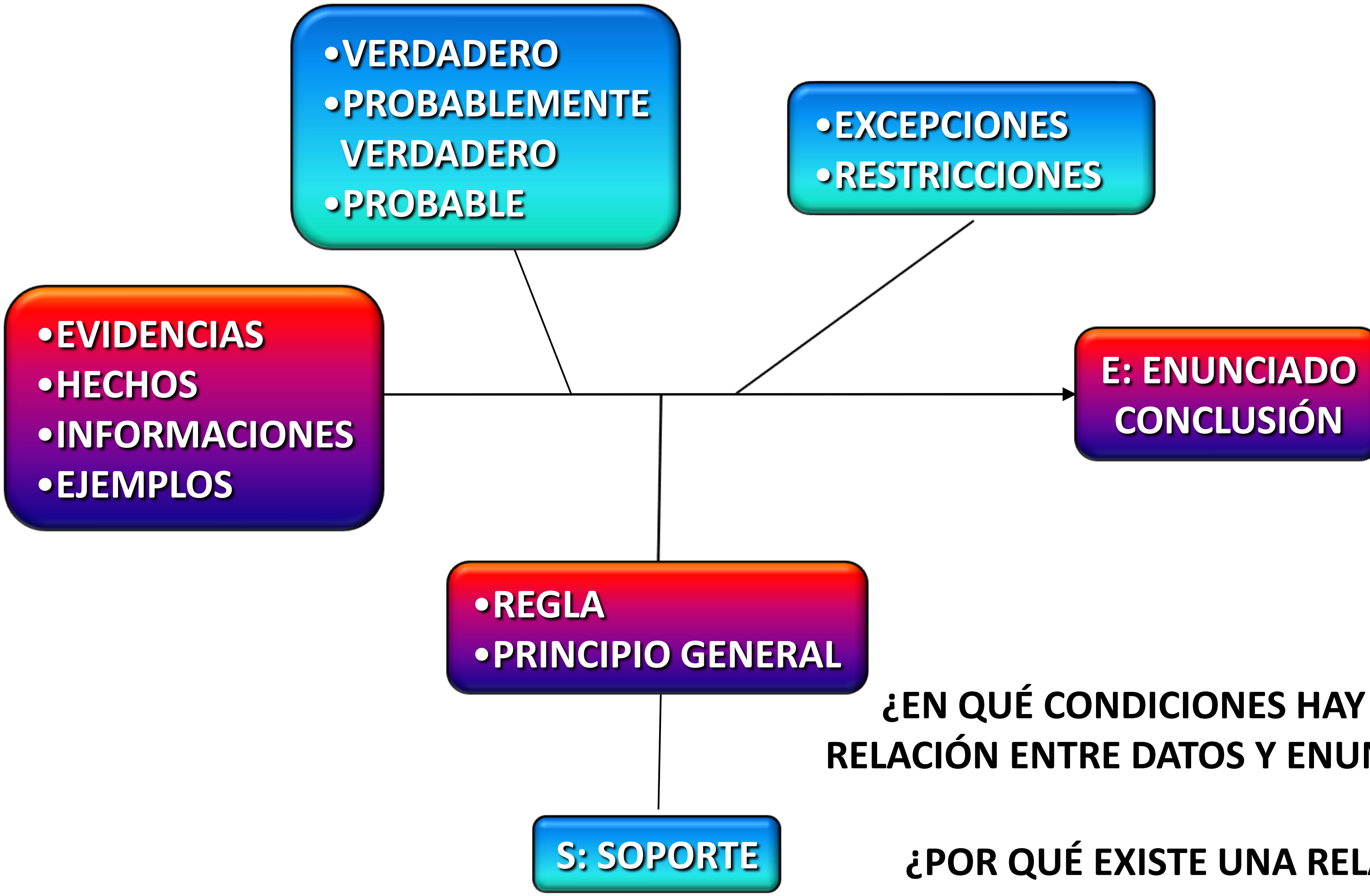
pertenece a

un campo teórico

Demostración

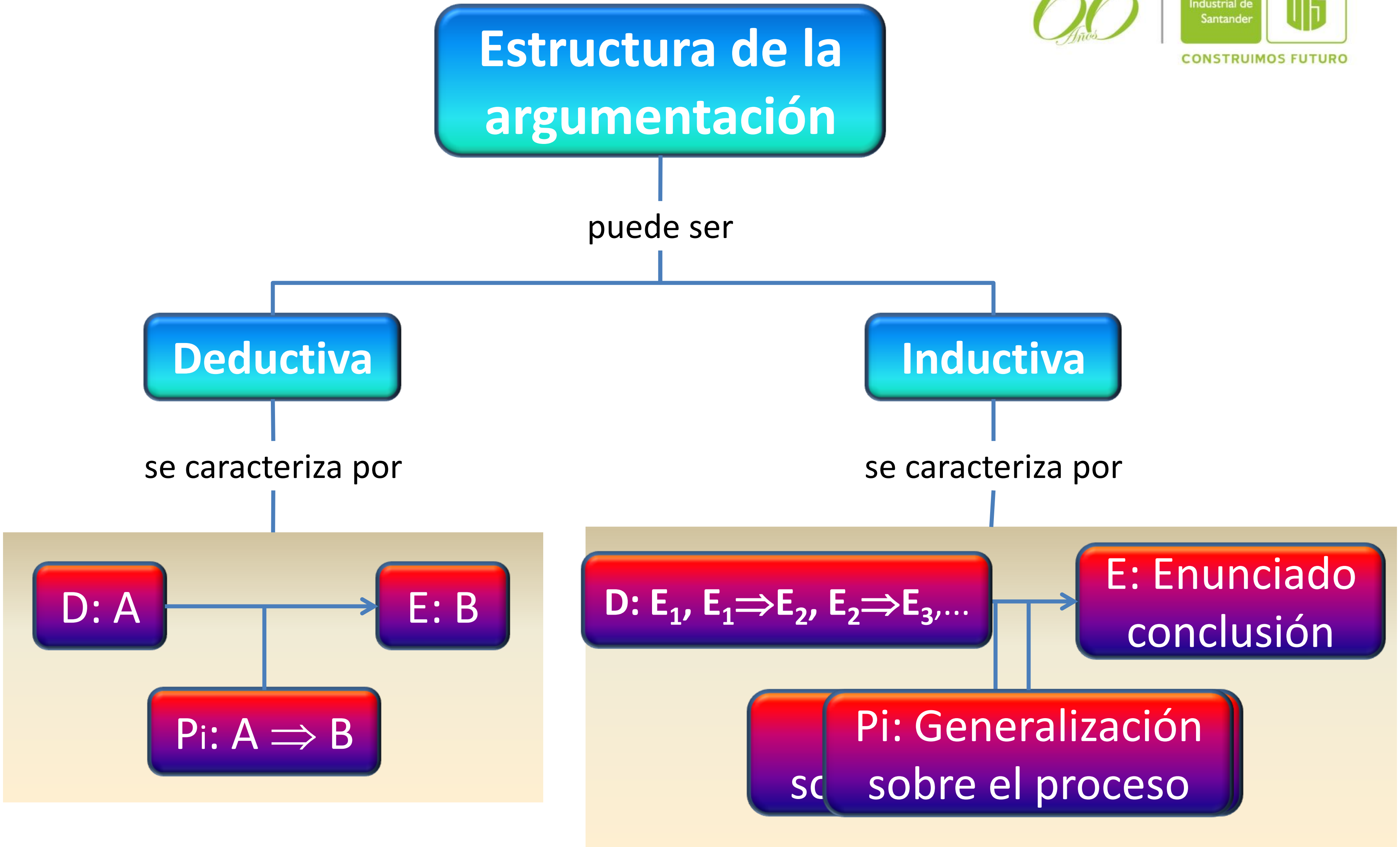
- Caso particular de argumentación con unas características específicas.
- Proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a si mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

El Modelo de Toulmin



¿EN QUÉ CONDICIONES HAY UNA RELACIÓN ENTRE DATOS Y ENUNCIADO?

¿POR QUÉ EXISTE UNA RELACIÓN ENTRE DATOS Y ENUNCIADO?


Estructura de la argumentación
puede ser
Deductiva
Inductiva
se caracteriza por
se caracteriza por
D: A
E: B
Pi: $A \Rightarrow B$
D: $E_1, E_1 \Rightarrow E_2, E_2 \Rightarrow E_3, \dots$
E: Enunciado conclusión
Pi: Generalización sobre el proceso

Formas de Argumentación

La argumentación puede estar relacionada con la conjetura en dos formas (Pedemonte, 2002):

- La ***argumentación constructiva*** contribuye a la construcción de una conjetura, precede al enunciado.
- La ***argumentación estructurante*** justifica una conjetura, previamente construida como un hecho, viene después.
- No son excluyentes.

Tipos de Demostración

- Empirismo Ingenuo Inductivo
- Experimento Crucial Basado en Ejemplo
- Experimento Crucial Constructivo
- Ejemplo Genérico Analítico
- Ejemplo Genérico Intelectual
- Experimento Mental Transformativo
- Experimento Mental Estructurado
- Deductiva Formal Transformativo
- Deductiva Formal Esctructurada

EMPIRISMO INGENUO INDUCTIVO

D: D_1, D_2,…,D_n → E

Generalización sobre los datos

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

EJEMPLO GENÉRICO INTELECTUAL

D: $E_g \Rightarrow E_1$, $E_1, \Rightarrow E_2$, ..., $E_n \Rightarrow A$

E:B

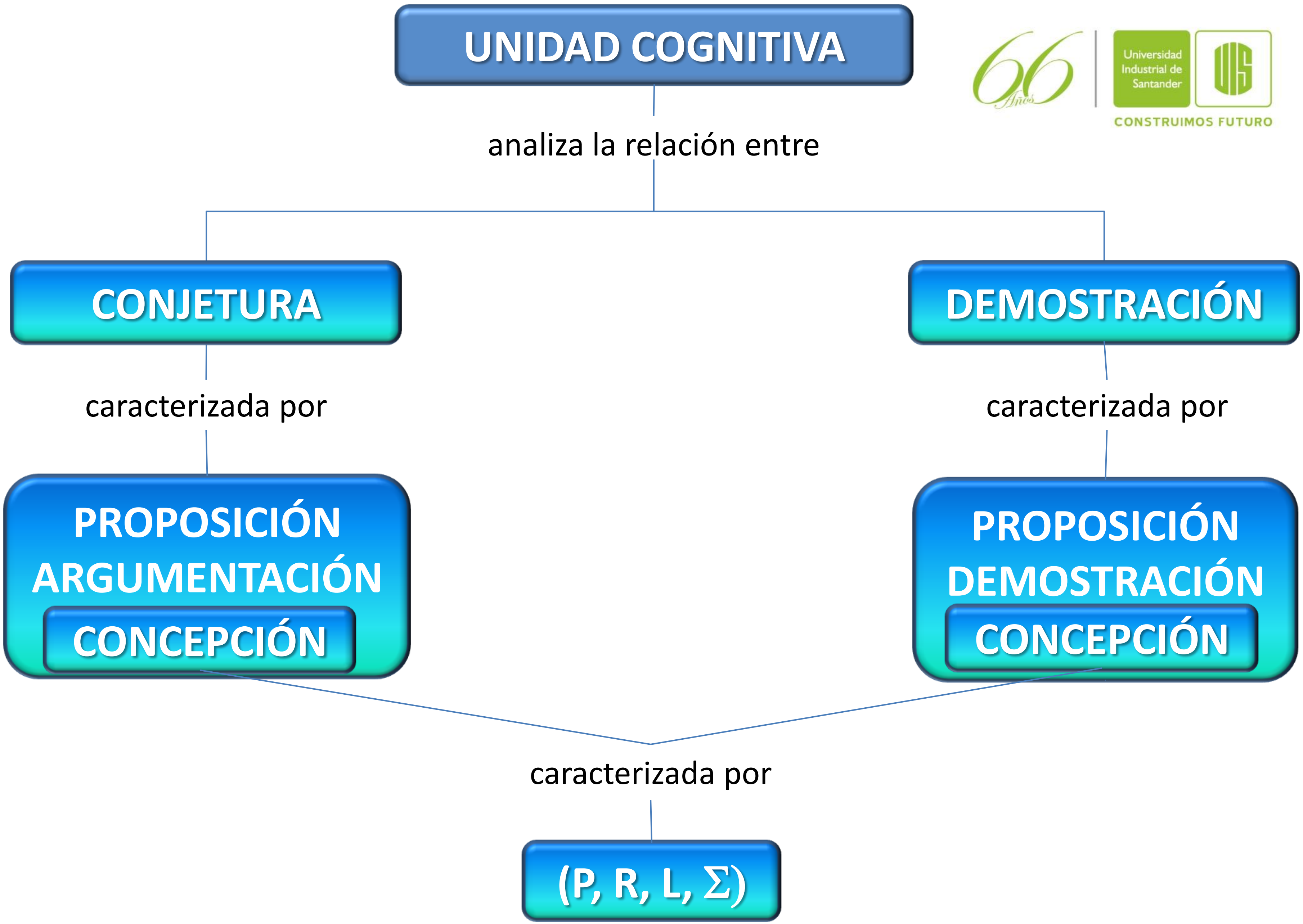
Pi: Generalización de las propiedades matemáticas recordadas en el proceso para llegar a A $[Eg \Rightarrow (A \Rightarrow B)]$

EXPERIMENTO MENTAL TRANSFORMATIVO

D: Ejemplos, A

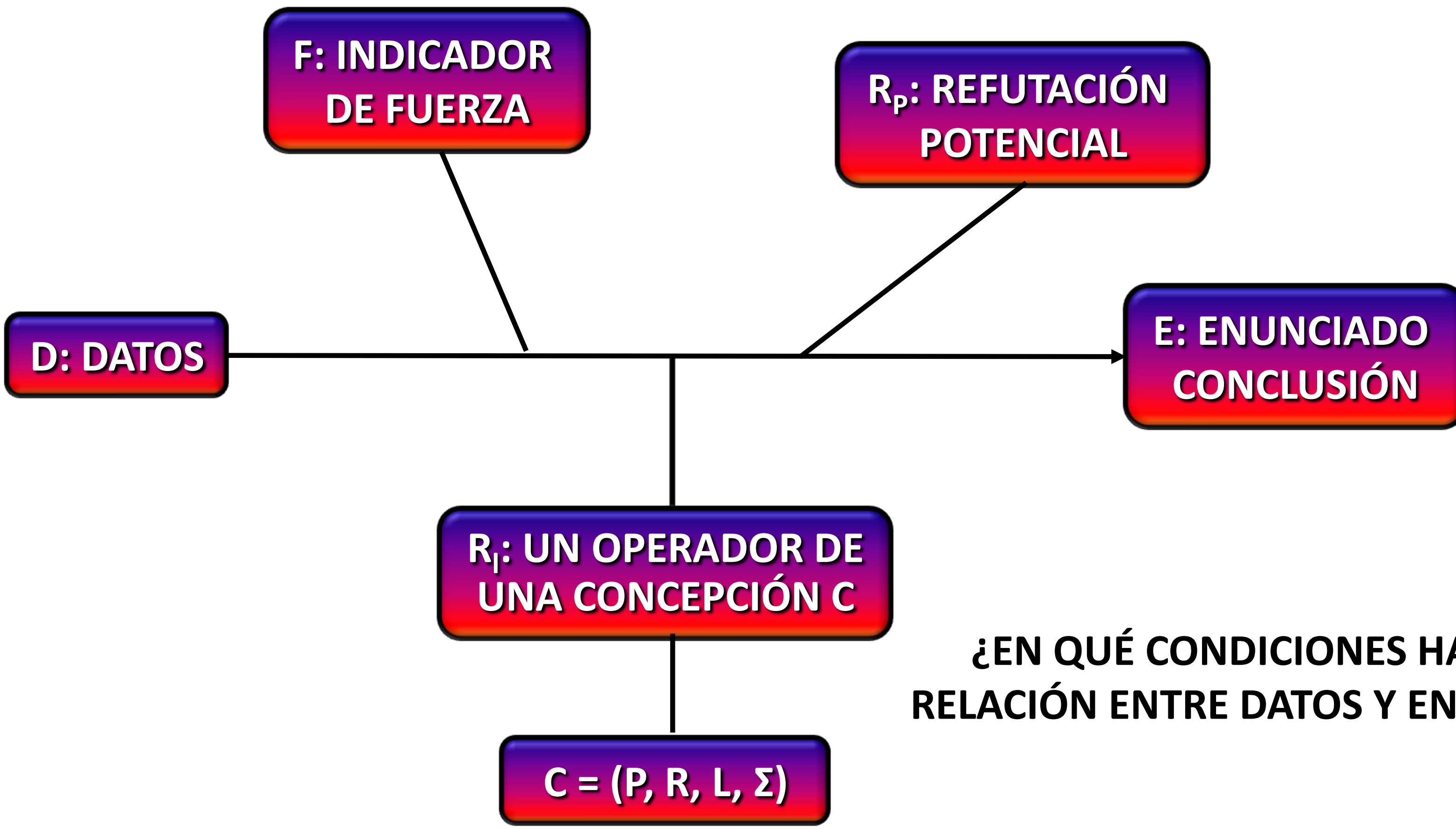
E: B

P_i: $A \Rightarrow C \wedge C \Rightarrow B$



Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Modelo de Pedemonte



¿EN QUÉ CONDICIONES HAY UNA RELACIÓN ENTRE DATOS Y ENUNCIADO?

¿POR QUÉ EL PERMISO DE INFERIR ES PERTINENTE PARA QUIEN ARGUMENTA? ¿POR QUÉ ES CORECTO? ¿POR QUÉ ES ADECUADO?

Ejemplo: ¿Qué relación existe entre $cos(180 + \alpha)$ y $\cos(\alpha)$?

[1] Mabe: *Yo creo que uno puede hablar de eso en el tercero y en el primero, o sea, cuando el ángulo θ está en el tercer cuadrante, porque ya cuando está en otro cuadrante θ no es 180 + α.*

[2] Inv.: *Necesariamente θ debe estar en el tercer cuadrante.*

[3] Inv.: *¿Qué relación encontraron?*

[4] Mabe: *Que* $cos(180 + \alpha) = -cos(\alpha)$

[5] Inv.: *¿Por qué?*

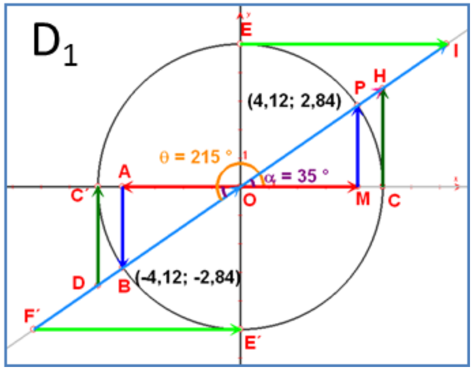
[6] Mabe: *Porque el ángulo α es el ángulo de referencia de θ.*

[7] Mabe: *Entonces como el coseno es positivo solo en el primero y en el último, entonces tienen signo contrario.*

[8] Inv.: *¿Los ángulo α son congruentes?*

[9] Mabe: *Sí, porque son opuestos por el vértice.*

D$_1$



D$_2$: Es necesario que θ esté el cuadrante III [1]

E1: $cos(180 + \alpha) = -cos(\alpha)$[4]

R$_1$: α es el ángulo de referencia de θ [6]

R$_2$: $cos(\alpha)$ y $cos(180 - \alpha)$ tienen signos contrarios [7]

R$_3$: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice [9]

Marco perceptivo

$$\boldsymbol{cos}(\mathbf{180}\ +\ \boldsymbol{\alpha}) = -\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha})$$

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

[15] Cata: *Adyacente sobre hipotenusa.*

[16] Inv.: *Adyacente sobre hipotenusa o x sobre r, ¿cierto?, entonces, sí es necesario demostrar que los x son iguales.*

[17] Mabe: *Es que los ángulos son iguales, por opuestos, y los radios son iguales, ¿qué más puedo decir sin utilizar medidas? Porque si no cogería las coordenadas y ya.*

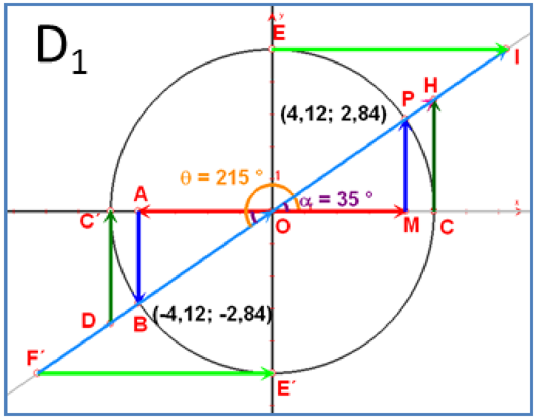
[20] Mabe: *Uno recto y el otro ya es igual, entonces, ya con eso son iguales.*

[21] Inv.: *Con eso, los dos triángulos son congruentes. Entonces, ¿si los dos triángulos son congruentes, qué pasa con la distancia en x, o con el adyacente?*

[22] G2A: *Es la misma.*

[23] Mabe: *¿Entonces, en la conjetura solo que son opuestos, y lo otro para la demostración?*

[24] G2A: [Escriben en la hoja de trabajo: … "$cos(180+\alpha)$ *tiene el mismo valor absoluto que su ángulo de referencia* α*, pero con signo contrario (–)*"]



D_2: Es necesario que θ esté el cuadrante III [1]

D_3: coseno es el vector rojo [13]

D_4: $\cos(\alpha) = \dfrac{adyacente}{hipotenusa}$ [15]

D_5: E_{1I}: $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{r}$ [16]

E1: $\boldsymbol{cos(180+\alpha) = -cos(\alpha)}$ [4]

R_4: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice [17]

R_5: $OP = OB$ por ser radios [17]

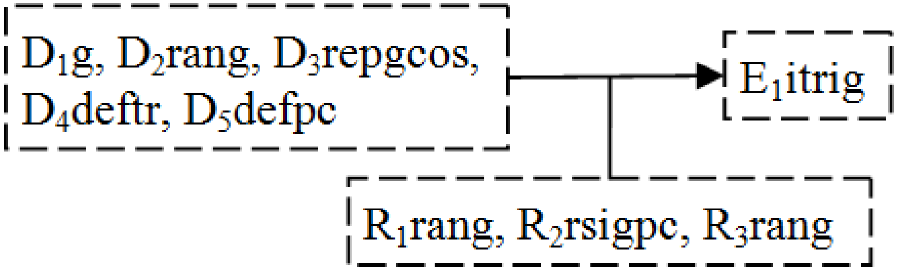
R_6: $\angle OMP = \angle OAB$ por ser rectos [20]

R_7: $R_3 \wedge R_6 \wedge R_7 \Rightarrow \Delta MOP = \Delta AOB \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OA}$ [20] – [22]

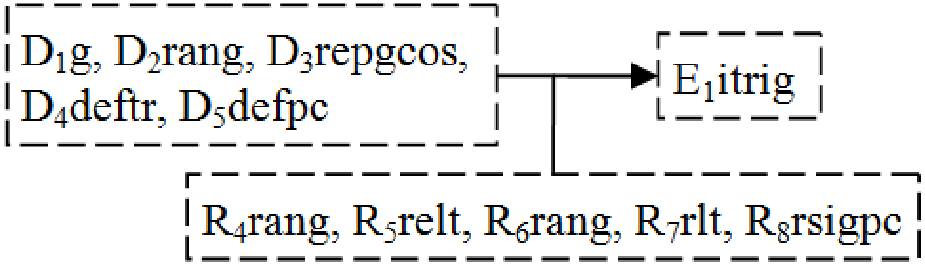
R_8: cos (α) y cos $(180 + \alpha)$ tienen igual valor absoluto, pero signos contrarios [24]

Marco perceptivo

Esquema global de la argumentación



Esquema global de la demostración



<table>
<tr><th colspan="3">ARGUMENTACIÓN
$\mathbf{E_1}$: $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$</th><th colspan="3">DEMOSTRACIÓN
$\mathbf{E_1}$: $\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$</th></tr>
<tr><td colspan="3">CONCEPCIÓN</td><td colspan="3">CONCEPCIÓN</td></tr>
<tr>
<td>OPERADORES
R$\mathbf{R_1}$: α es el ángulo de referencia de θ.
$\mathbf{R_2}$: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180+\alpha)$ tienen signos contrarios.
$\mathbf{R_3}$: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice</td>
<td>SIST. DE REPR.
$\mathbf{L_1}$: Diagrama dinámico.
$\mathbf{L_2}$: Lenguaje natural (uso de expresiones verbales).</td>
<td>E. DE CONTROL
$\mathbf{\Sigma_1}$: Perceptivo (visualización de los vectores y relaciones entre ángulos y triángulos).</td>
<td>OPERADORES
$\mathbf{R_4}$: coseno es el vector rojo.
$\mathbf{R_5}$ $\cos(\alpha) = \frac{ady}{hip}$
$\mathbf{R_3}$: $\angle MOP = \angle AOB$ por opuestos por el vértice.
$\mathbf{R_6}$: $OP = OB$ por ser radios.
$\mathbf{R_7}$: $\angle OMP = \angle OAB$ por ser rectos.
$\mathbf{R_8}$: $R_3 \wedge R_6 \wedge R_7 \Rightarrow \Delta MOP = \Delta AOB \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OA}$.
$\mathbf{R_9}$: $\cos(\alpha)$ y $\cos(180+\alpha)$ tienen igual valor absoluto, pero signos contrarios</td>
<td>SIST. DE REPR
$\mathbf{L_1}$: Diagrama dinámico.
$\mathbf{L_2}$: Lenguaje natural (uso de expresiones verbales).</td>
<td>E. DE CONTROL
$\mathbf{\Sigma_1}$: Perceptivo (visualización de los vectores y relaciones entre ángulos y triángulos).</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Marco perceptivo – geométrico</td><td colspan="3">Marco perceptivo – geométrico</td></tr>
<tr><td colspan="6">CONTINUIDAD DEL SISTEMA DE REFERENCIA</td></tr>
</table>

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN EGA: Los argumentos están basados en propiedades matemáticas visualizadas en el ejemplo cuando θ está en el tercer cuadrante.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

	UNIDAD/RUPTURA REFERENCIAL	UNIDAD /RUPTURA ESTRUCTRURAL		UNIDAD/RUPTURA COGNITIVA
1	UNIDAD (R, L,Σ)	CONTINUIDAD INDUCTIVA		UNIDAD COGNITIVA INDUCTIVA
		INDUCTIVA	EII, EC, EG	
2	RUPTURA (R, L, Σ)	CONTINUIDAD INDUCTIVA		RUPTURA COGNITIVA INDUCTIVA
		INDUCTIVA	EII, EC, EGA	
3	RUPTURA (R, L, Σ)	CONTINUIDAD INDUCTIVA		RUPTURA COGNITIVA INDUCTIVA
		INDUCTIVA	EGI	
4	UNIDAD (R, L, Σ)	RUPTURA		RUPTURA COGNITIVA
		INDUCTIVA	DF	
5	UNIDAD (R, L, Σ)	CONTINUIDAD DEDUCTIVA		UNIDAD COGNITIVA DEDUCTIVA
		DEDUCTIVA	EM, DF	

¿Qué relación existe entre $tan(A)$ y $tan(-A)$?

[1] Cata: *¿Tangente es qué? x sobre y, entonces, aquí es positivo, aquí es negativo… Entonces es lo mismo.*
[2] Mabe: *No, que el seno de A.*
[3] Cata: *O sea, por ejemplo, si este queda por acá, el otro va a quedar acá y el otro va a ser negativo. En estos cuadrantes los dos son negativos.*
[4] Mabe: *No.*
[5] Cata: *Claro, porque aquí hay una negativa y aquí también, ah mentiras, estas dos son negativas.*
[6] Mabe: *Tangente es positivo en este y en este, entonces si tienes un ángulo obtuso, digamos de 150, el ángulo negativo va a ser acá, entonces, este va a ser positivo…*
[8] Cata: *Como la de seno.*
[10] G2A: *Que* $\tan(\mathrm{A}) = -\tan(-\mathrm{A})$[lo escriben en la hoja de trabajo].
[12] Cata: *Pues viendo…*

D$_1$: $\tan(A) = \frac{x}{y}$ [1]

D$_2$: tangente positiva en el cuadrante I y III, tangente negativa en el cuadrante II y IV [1], [3], [5]

D$_3$: $\tan(150) < 0$, $\tan(-150) > 0$ [6]

E$_1$: $\tan(A) = -\tan(-A)$ [10]

R1: Generalización de los datos y analogía con los enunciados de las actividades anteriores [1], [2], [6], [8]

Marco perceptivo [12]

66 Años
Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

[13] Inv.: *¿Cómo demuestran eso?*

[...]

[17] Cata: *Porque es que las dos son cambiantes, no es como en el seno, que el radio es constante, y siempre va a ser positivo, aquí también puede ser que x sea negativa, por ejemplo, entonces la razón da negativa, pero y puede ser positiva. Toca hacer dos diferentes.*

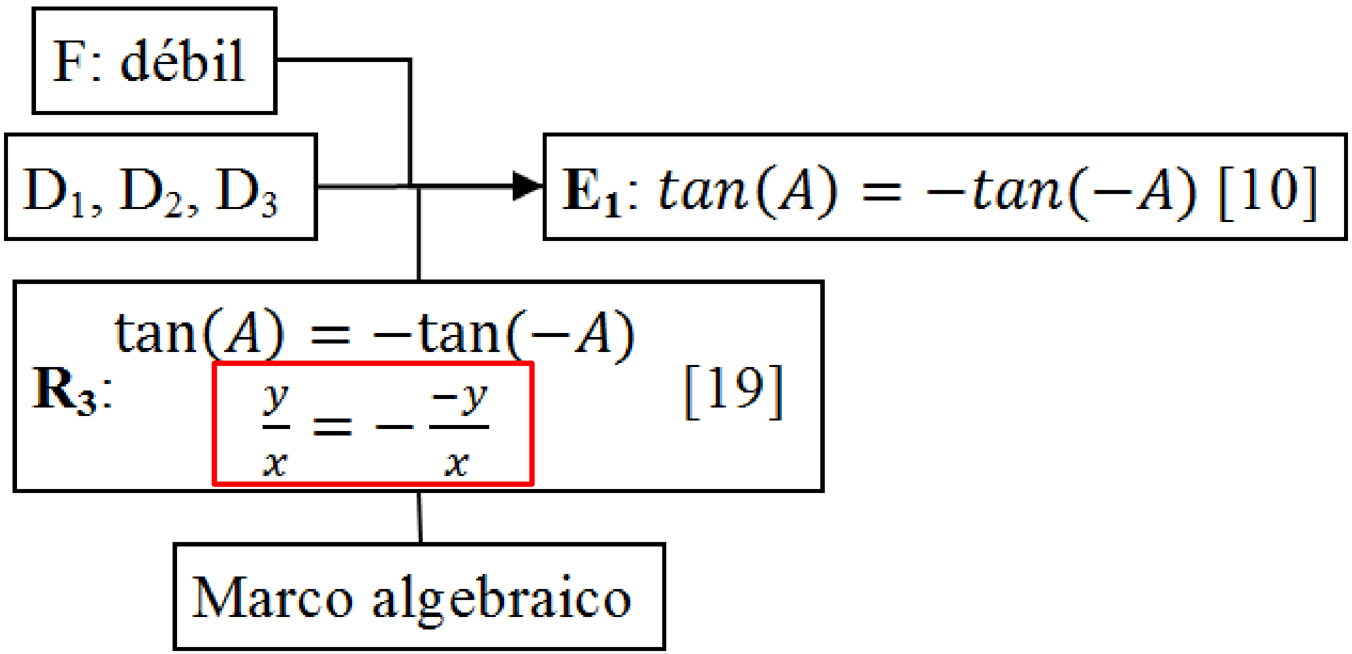
D$_4$: $x < 0$, $tan(A) < 0$ [17]

E$_2$: $y > 0$ [17]

R$_2$: Ley de los signos [17]

[18] Mabe: *¿Entonces cómo se escribe?*

[19] Cata: *Por ejemplo, menos, menos y sobre x* [completa la igualdad que dejó pendiente la hoja de trabajo [15]: $\boxed{\frac{y}{x} = -\frac{(-y)}{x}}$]



[22] Inv.: *No, espérate, con eso es suficiente, ¿sabes por qué?*

[23] Cata: *¿Por qué?*

[24] Mabe: *Porque si y es -5, y igual va a ser -5, porque −y sería +5, porque este menos de afuera, +5, digamos, ah, no, pero.*

D_1, D_2, D_3 → $\mathbf{E_1}$: $tan(A) = -tan(-A)$ [10]

$\mathbf{R_4}$: $\tan(A) = -\tan(-A)$; $\frac{-5}{x} = -\frac{5}{x}$ [24]

Marco numérico

66 Años | Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

[29] Inv.: … *¿qué relación hay entre las x y las y en cualquier cuadrante?*

[30] Cata: *No sé.*

[31] Inv.: *¿Si tu comparas la x del ángulo A con la x del ángulo –A?*

[32] Cata: *Igual.*

D$_5$: **E$_{11}$**: ¿Qué relación hay entre las abscisas de A y $-A$? [31]

E$_3$: La abscisa de A igual a la abscisa de $-A$ [32]

R$_5$: Relación en el plano cartesiano

[33] Mabe: *Pero solo cuando están en...*
[34] Cata: *Cuando están en el cuadrante de abajo, cuando están, o sea.*
[35] Mabe: *Sólo cuando x y y son positivas, o x y y son negativas es que la tangente es positiva.*

D_6: $(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$ [35] → **E_4**: $tan(A) > 0$ [35]

R_6: **R_2**: Ley de los signos [35]

[38] Inv.: *¿Entonces, las x del ángulo A y del ángulo –A, cómo son?*

[39] Cata: *Ah, ya entendí, iguales, siempre.*

Mabe: *¿Por qué?*

[41] Cata: *Porque x se está moviendo sobre el eje x y no sobre el eje y, si ve, mira aquí, mira, aquí es menos y menos, y acá es más y más.*

[43] Cata: *En cambio las y no se puede hacer porque las y se hace con este y con este, y como no se toma el eje y, sino el eje x.*

[44] Mabe: *Ah sí por lo que la posición normal es con el eje x.*

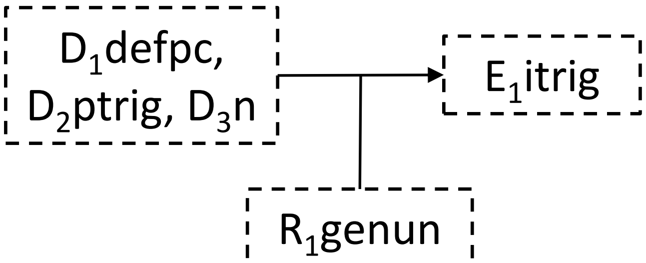
D_5: **E_{11}**
D_7: En el eje x positivo, x es positivo, y en el eje x negativo, x es negativo para A y $-A$ [38]

E_3: La abscisa de A igual a la abscisa de $-A$ [39]

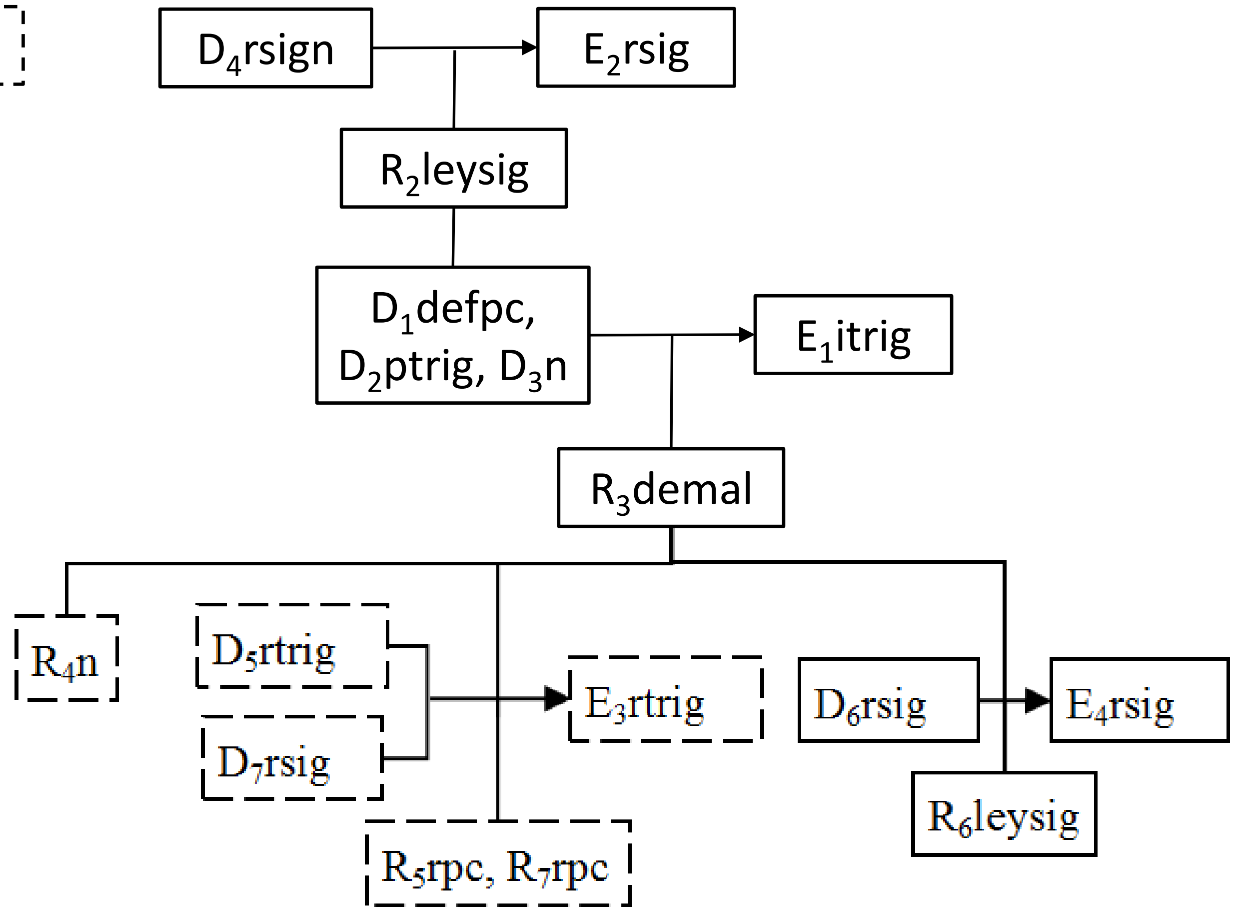
R_7: x varía sobre el eje x, y no varía sobre el eje x [41] - [44]

66 Años
Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Esquema global de la argumentación



Esquema global de la demostración



<table>
<tr><th colspan="3">ARGUMENTACIÓN
$\mathbf{E_1}$: $tan(A) = -tan(-A)$</th><th colspan="3">DEMOSTRACIÓN
$\mathbf{E_1}$: $tan(A) = -tan(-A)$</th></tr>
<tr><td colspan="3">CONCEPCIÓN</td><td colspan="3">CONCEPCIÓN</td></tr>
<tr>
<td>OPERADORES

$\mathbf{R_1}$: Generalización de los datos y uso de la analogía.</td>
<td>SIST. DE REPR.

$\mathbf{L_1}$: Diagrama dinámico.

$\mathbf{L_2}$: Lenguaje algebraico.</td>
<td>E. DE CONTROL

$\mathbf{\Sigma_1}$: Arrastre en Cabri para visualizar relaciones y propiedades

$\mathbf{\Sigma_2}$: Teórico (definición de tangente).

$\mathbf{\Sigma_3}$: Teórico (uso de la analogía con la actividad anterior).</td>
<td>OPERADORES

$\mathbf{R_2}$: Ley de los signos

$\mathbf{R_3}$: $\tan(A) = -\tan(-A)$ $\frac{y}{x} = -\frac{-y}{x}$

$\mathbf{R_4}$: $\tan(A) = -\tan(-A)$ $\frac{-5}{x} = -\frac{5}{x}$

$\mathbf{R_5}$: Relación en el plano cartesiano.

$\mathbf{R_6}$: R_2.

$\mathbf{R_7}$: x varía sobre el eje x, y no varía sobre el eje x.</td>
<td>SIST. DE REPR

$\mathbf{L_1}$: Diagrama dinámico.

$\mathbf{L_2}$: Lenguaje algebraico.

$\mathbf{L_3}$: Lenguaje natural.</td>
<td>E. DE CONTROL

$\mathbf{\Sigma_2}$: teórico: (definición de tangente en el plano y del algebra)

$\mathbf{\Sigma_4}$: perceptivo numérico.

$\mathbf{\Sigma_1}$: Arrastre en Cabri para visualizar relaciones y propiedades.</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Marco perceptivo – numérico – analítico</td><td colspan="3">Marco algebraico – numérico – perceptivo</td></tr>
<tr><td colspan="6">RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA</td></tr>
</table>

ARGUMENTACIÓN	DEMOSTRACIÓN
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN EGI: Generalización inductiva de las propiedades visualizadas en las coordenadas de los ángulos *A* y –*A* cuando *A* está en el cuadrante III y IV.
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Algunas conclusiones

En algunos casos es necesaria la *ruptura cognitiva* (ruptura referencial o estructural) para lograr que el estudiante construya demostraciones deductivas.

Si el marco de la conjetura es *perceptivo numérico*, y no se logra la ruptura referencial hacia una combinación de marcos (geométrico, algebraico, analítico, trigonométrico), no es posible la construcción de una demostración deductiva.

Algunas conclusiones

Si el marco de la conjetura es *perceptivo geométrico*, se puede pasar a una demostración deductiva si el marco de la demostración sigue siendo geométrico, pero, si el marco es algebraico, analítico o trigonométrico, la posibilidad de una demostración deductiva es más lejana.

Si en la construcción de la demostración, *el control sigue siendo el arrastre* o los ejemplos, no es posible la construcción de una demostración deductiva.

Algunas conclusiones

Si la ruptura del sistema de referencia se da por las continuas intervenciones del profesor dentro de un proceso “guiado” y no por refutaciones potenciales que invaliden los operadores, la ruptura estructural no se logra.

El planteamiento de conjeturas por analogía (Polya, 1966) y por generalización de enunciados y procedimientos realizados en problemas anteriores, no ayuda a la construcción de demostraciones deductivas.

Algunas conclusiones

Si la forma de argumentación es *estructurante*, existen mayores posibilidades de construcción de una demostración genérica o deductiva.

Si la forma de argumentación es *constructiva*, sin un control teórico, existen mayores posibilidades de construcción de una demostración empírica.

Si la forma de argumentación es *constructiva*, con un control teórico, existen mayores posibilidades de construcción de una demostración genérica o deductiva.

Algunas conclusiones

Si se construye una demostración *genérica intelectual* hay más posibilidades de una ruptura estructural que conlleve a la construcción de una demostración deductiva.

En el caso de *unidad cognitiva deductiva*, se corrobora la hipótesis de Pedemonte (2005) en el sentido de que la unidad cognitiva favorece la construcción de demostraciones deductivas.

Referencias bibliográficas

- Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble: Université Joseph Fourier.
- Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage -Editions-.
- Boero, P. (2007). Theorems in School: An introduction. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 19-24). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.
- Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceeding 20th PME International Conference,Valencia, España, 2*, 113-120.

Referencias bibliográficas

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

- Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. (Tesis doctoral). Valencia (España):Universidad de Valencia.
- Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démostration dans le apprentisage des mathématiques.* (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble, Francia.
- Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l`analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathematiques, 25*(3), 313 - 348.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*, 23-41.
- Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education, 40*, 385-400.
- Toulmin, S.E., (1958) The use of argument, Cambridge University Press.

Análisis de la unidad cognitiva entre los procesos de argumentación y demostración en trigonometría

JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL

jfiallo@uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander

EDUMAT UIS

Info: http://matematicas.uis.edu.co/jfiallo/?q=node/15